

MODELOS AUTORREGRESIVOS VECTORIALES INTEGRADOS CON VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA MULTIVARIADA APLICADO A LA ECONOMÍA DE ESTADOS UNIDOS EN EL PERIODO DE 1948-2019

INTEGRATED VECTOR AUTOREGRESSIVE MODEL WITH MULTIVARIATE STOCHASTIC VOLATILITY APPLIED TO THE UNITED STATES ECONOMY IN THE PERIOD 1948-2019

Cristian Andrés Cruz Torres¹
Marvin Levi Villafranca Rivera²

Resumen

Los modelos autorregresivos vectoriales (VAR) han demostrado ser eficientes para capturar las relaciones dinámicas de las series de tiempo multivariadas. Los modelos de volatilidad estocástica multivariada (MSV) muestran ser útiles para modelar la varianza cuando cambia en el tiempo. Por lo anterior, en este artículo se propone la integración de un modelo VAR con un modelo MSV (VAR-MSV). La elección del VAR-MSV más adecuado se lleva a cabo por medio del Criterio de Información de Desviación (DIC). Se hizo una aplicación a dos variables macroeconómicas clave para los Estados Unidos. Se agregó el índice del mercado de valores SP500 y se interpretaron los resultados. Para estimar los parámetros se usan métodos de Monte Carlo vía Cadenas de Markov (MCMC). Los resultados indican que el modelo VAR-MSV captura las relaciones dinámicas, así como la varianza cambiando en el tiempo de manera eficaz.

Palabras clave: Volatilidad Estocástica, VAR-MSV, Muestreador multi-move.

Abstract

Vector autoregressive (VAR) models have proven to be efficient in capturing the dynamic relationships of multivariate time series. Multivariate stochastic volatility (MSV) models have shown to be useful for modeling the variance as it changes over time. Therefore, this article proposes the integration of a VAR model with an MSV model (VAR-MSV). The choice of the most suitable VAR-MSV is carried out by means of the Deviance Information Criterion (DIC). An application was made to two key macroeconomic variables for the United States. It added the SP500 stock market index and interpreted the results. To estimate the parameters, Monte Carlo methods via Markov Chains (MCMC) are used. The results indicate that the VAR-MSV model captures dynamic relationships as well as variance changing over time effectively.

Key words: Stochastic Volatility, VAR-MSV, Multi-Move Sampler.

Introducción

Recepción: 20 de Junio de 2024/ Evaluación: 15 de Julio de 2024/ Aprobado: 29 de Agosto de 2024

¹Docente del Departamento de Estadística Matemática, Escuela de Matemática. Universidad Nacional Autónoma de Honduras, Tegucigalpa, Honduras. Email: cristian.cruz@unah.edu.hn ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2185-5783>.

²Maestría en Matemáticas con Orientación en Estadística Matemática. Universidad Nacional Autónoma de Honduras, Tegucigalpa. Email: marvin.villafranca@unah.hn ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-9614-6504>

En una serie de artículos, el macroeconomista Christopher Sims, Sims C. A., 1972a; Sims C. A., 1972b; Sims C. A., 1980a; Sims C. A., 1980b propuso el uso de los modelos autorregresivos vectoriales (VAR), para modelar la dinámica y las relaciones causales entre un conjunto de variables macroeconómicas. Desde entonces, los modelos VAR han demostrado ser especialmente útiles en series temporales macroeconómicas para describir el comportamiento dinámico, realizar pronósticos, hacer inferencia estructural y análisis de políticas. Su configuración es tal que los valores actuales de un conjunto de variables se explican en parte por los valores pasados de las variables involucradas, esto se debe a que a menudo el valor de una variable no solo está relacionado con sus predecesores en el tiempo, sino que, además depende de valores pasados de otras variables.

Sin embargo, los modelos VAR mantienen la suposición bastante fuerte de que la matriz de covarianza es constante en el tiempo. Hay muchas razones para pensar que tal suposición puede ser demasiado restrictiva en muchas aplicaciones macroeconómicas. Por ejemplo, en la década de 1980 (período conocido como la Gran Moderación) muchas economías industrializadas de Estados Unidos (US) experimentaron una reducción de la variabilidad de muchas variables macroeconómicas (ver, por ejemplo, Cogley & Sargent, 2005; Primiceri, 2005; Benati, 2008). Además, algunos estudios han demostrado que tras la Gran Moderación la variabilidad aumentó durante 2007-2009 (período conocido como la Gran Recesión). (ver, por ejemplo, Clark, 2011; Clark & Ravazzolo, 2015). Esta variabilidad en las variables macroeconómicas es conocida como volatilidad.

La baja volatilidad en el periodo de la Gran Moderación es pensada en diversas hipótesis presentadas en la literatura, perteneciendo a dos categorías amplias. El primer punto de vista, a menudo referido como la hipótesis de "la buena suerte", sugiere que la mayor estabilidad macroeconómica comprendida en el periodo de la Gran Moderación es en gran medida al resultado de choques más pequeños que inciden en la economía, y que los cambios estructurales han jugado, como mucho, un papel secundario. El segundo punto de vista atribuye la reducción de la volatilidad agregada a cambios en la estructura de la economía y en la forma en que se ha llevado a cabo la política. La alta volatilidad en el periodo de la Gran Recesión se atribuye a choques procedentes de los mercados financieros.

Por lo anterior, modelar la variación temporal aparentemente significativa de la volatilidad macroeconómica es importante para la precisión de una variedad de tipos de inferencia. Se han realizado muchos esfuerzos para crear modelos que toman en cuenta la variación temporal de la volatilidad. Uhlig, 1997 fue el primero en introducir la volatilidad estocástica multivariada (MSV) sin restricciones en el contexto de los modelos VAR, escogiendo la distribución beta multivariante para explotar una conjugación entre esa distribución y la distribución Wishart. La literatura de los modelos autorregresivos vectoriales con volatilidad estocástica multivariada es extensa (ver, por ejemplo, Cogley & Sargent, 2005; Cogley & Sargent, 2005; Primiceri, 2005; Benati, 2008; Gali & Gambetti, 2009; Triantafyllopoulos, 2011; Jore et al., 2010; Clark, 2011; D'Agostino et al., 2013; Clark & Ravazzolo, 2015; Chiu et al., 2017; Mumtaz, 2018; Mumtaz, 2020; Ding et al., 2021).

En objetivo de este artículo es proponer un modelo VAR integrado con un modelo MSV en el que los choques de las variables endógenas en el tiempo t están correlacionados con los choques de la volatilidad en el tiempo $t + 1$. Además, se propone una metodología para estimar los parámetros usando métodos de Monte Carlo vía Cadenas de Markov (MCMC). Finalmente, se aplica el modelo para analizar las relaciones dinámicas y evolución de la volatilidad de series temporales macroeconómicas clave para los Estados Unidos: Producción Industrial y Tasa de Desempleo. Agregamos el índice del mercado de valores SP500 debido a la reciente evidencia

sobre la relevancia de las variables financieras con el fin de mejorar las estimaciones de los parámetros y su influencia en las variables macroeconómicas (ver, por ejemplo, Stock & W.Watson, 2003 y Chiu et al., 2017).

A lo largo de este artículo se presenta el marco conceptual donde exponemos una revisión bibliográfica de algunos modelos VAR con diferentes configuraciones en la matriz de covarianza. Luego se presenta la metodología donde presentamos el modelo propuesto VAR-MSV, método de estimación de los parámetros de interés, selección del mejor orden VAR-MSV, además, mostramos un ejemplo con datos simulados con el fin de mostrar la eficiencia y precisión del método propuesto y una aplicación a dos variables macroeconómicas y una financiera. Después presentamos la discusión de resultados donde comentamos los resultados del ejemplo con datos simulados y la aplicación a dos variables macroeconómicas y una financiera. Por último, exponemos las conclusiones donde presentamos los resultados de mayor importancia.

Marco Teórico

Como se mencionó en la sección previa, los modelos VAR son útiles para poder capturar las relaciones dinámicas de un conjunto de variables macroeconómicas. Sin embargo, la suposición de matriz de covarianza constante en el tiempo es un problema debido a que en las variables macroeconómicas presentan periodos en los que hay mucha variabilidad lo que resulta en estimaciones de parámetros con poca precisión. Es por esa razón que muchos investigadores han realizado un gran esfuerzo para capturar la variabilidad de las variables macroeconómicas integrando los modelos VAR con modelos MSV. Con el fin de poder entender más la importancia de los modelos VAR-MSV en este apartado presentamos una revisión bibliográfica de diferentes modelos autorregresivos vectoriales con diferentes configuraciones en su matriz de covarianza y algunas de sus aplicaciones y de esta manera poder tener una comprensión más amplia del tema.

Comenzamos con el modelo de Uhlig, 1997 que introduce la volatilidad estocástica multivariada sin restricciones en el contexto de los modelos autorregresivos vectoriales. El modelo que propuso es de la siguiente manera

$$\begin{aligned} Y_t &= A_0 V_t + B_1 y_{t-1} + \dots + A_k y_{t-k} + R_t^{-1} \varepsilon_t, & t = 1, \dots, n, \\ H_{t+1} &= \frac{1}{\lambda} R_t^T \Sigma_t R_t, & t = 0, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (1)$$

donde

$$\varepsilon_t \sim N(0, I_p), \quad \Sigma_t \sim \beta_p \left(\frac{v + c + kp}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

Las variables Y_t , $t = 1 - k, \dots, n$ de dimensión $p \times 1$ son datos observables. V_t de dimensión $c \times 1$ denota regresores deterministas como una constante y una tendencia de tiempo. La matriz de coeficientes B_0 es de dimensión $p \times c$. Las matrices de coeficientes B_i , $i = 1, \dots, k$ son de dimensión $p \times p$. $v > p - 1$ y $\lambda > 0$ son parámetros. ε_t , $t = 1, \dots, n$ son errores de dimensión $p \times 1$. Σ_t , $t = 1, \dots, n$ son de dimensión $p \times p$ distribuidos independientemente. R_t denota la descomposición de Cholesky triangular superior de H_{t+1} y $\beta_m(a, b)$ denota la distribución beta multivariada. Uhlig, 1997 escogió la distribución beta multivariante para explotar una conjugación entre esa distribución y la distribución Wishart para que la integración sobre el choque no observado en la matriz de precisión se puede realizar de forma cerrada, lo que lleva a una generalización de las fórmulas estándar de filtro de Kalman.

Cogley, 2005 para estimar la tendencia de crecimiento en la “nueva economía” desarrolló una estrategia de filtrado bayesiano. La especulación sobre el crecimiento es importante para una

variedad de decisiones de política pública. Además, las estimaciones de crecimiento tendencial también son importantes para la política monetaria. En un modelo homocedástico la tendencia de crecimiento es constante en el tiempo. Supone que la tendencia de crecimiento varía con el tiempo. Define el crecimiento tendencial de la siguiente manera

$$\tau_t = S_{\Delta q}(I - A_t)^{-1}\mu_t \quad (2)$$

Cogley, 2005 calcula $A_t, \mu_t, t = 1, \dots, n$ y $S_{\Delta q}$, usando un modelo autorregresivo vectorial bayesiano con parámetros variando en el tiempo que es dado por

$$Y_t = X_t^T \beta_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \Sigma_t), \quad (3)$$

donde X_t incluye constantes más rezagos de Y_t , β_t es un vector de parámetros VAR variando en el tiempo.

Al aplicar las variables de manera correcta expresa (3) en forma complementaria como

$$z_t = \mu_t + A_t z_{t-1} + u_t, \quad (4)$$

donde z_t consiste en valores actuales y rezagos de Y_t , μ_t contiene las intersecciones en β_t y A_t contiene los parámetros autorregresivos en el tiempo t . $S_{\Delta q}$ es un vector fila que selecciona el crecimiento del producto interno bruto (PIB) real de z_t . β_t evoluciona como una caminata aleatoria con barrera reflectante de la siguiente manera

$$\beta_t = \beta_{t-1} + W_t, \quad W_t \sim N(0, Q). \quad (5)$$

Para modelar Σ_t adopta una versión multivariada del modelo de volatilidad estocástica de Jacquier, Polson, & Rossi, 2004 donde

$$\begin{aligned} \Sigma_t &= B^{-1} H_t (B^{-1})^T, \\ H_t &= \begin{pmatrix} h_{1t} & 0 \\ 0 & h_{2t} \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6)$$

$h_{it}, i = 1, 2, \dots$ son volatilidades estocásticas univariadas e independientes que evolucionan como caminata aleatoria geométrica sin deriva.

$$\log(h_{it}) = \log(h_{it-1}) + \sigma_i \eta_{it}, \quad \eta_{it} \sim N(0, 1), \quad (7)$$

donde η_{it} son independientes entre sí y de los otros choques del modelo, $E(\xi_t W_t^T) = 0, \forall s, t, \xi_t = \Sigma_t^{-1/2} \varepsilon_t$. También se asume que ambos W_t y ξ_t son independientes entre η_t .

Cogley & Sargent, 2005 presentan densidades posteriores para varios objetos que son pertinentes para diseñar y evaluar política monetaria. Para este fin usan un modelo autorregresivo vectorial con parámetros variando en el tiempo y volatilidad estocástica como en (3), (5)-(7) con sus respectivas restricciones. Las variables que usan en este modelo son inflación, desempleo y tasa de interés.

Primiceri, 2005 estimó un modelo autorregresivo vectorial estructural con parámetros variando en el tiempo con el fin de investigar las causas potenciales del pobre desempeño económico de los Estados Unidos en los años 70 y principios de los 80 y, en qué medida la política monetaria desempeña un papel importante en esos episodios de alto desempleo e inflación. Usa los parámetros variando en el tiempo para medir los cambios de política y los cambios implícitos en el comportamiento del sector privado. Las ecuaciones múltiples del modelo las usa para comprender cómo los cambios en la política han afectado al resto de la economía. A diferencia del modelo de Cogley, 2005 y Cogley & Sargent, 2005 el modelo propuesto permite que las correlaciones simultáneas entre las variables varíen en el tiempo.

Benati, 2008 usa un modelo autorregresivo vectorial estructural bayesiano de parámetros variables en el tiempo con volatilidad estocástica como el de Primiceri, 2005 para investigar la contribución de la política monetaria a los cambios en el crecimiento de la producción y la dinámica de la inflación en los Estados Unidos.

Gali & Gambetti, 2009 usa un modelo autorregresivo vectorial estructural con parámetros variando en el tiempo y volatilidad estocástica como el de Primiceri, 2005 con el fin de proporcionar evidencia sobre algunos de los cambios experimentados por la economía de Estados Unidos durante el período posterior a la Segunda Guerra Mundial y alrededor del momento del quiebre de la volatilidad asociado con la Gran moderación.

Chiu et al., 2017 propone un modelo autorregresivo vectorial con volatilidad estocástica y errores t de Student para investigar el ajuste dentro de la muestra y el rendimiento de pronóstico fuera de la muestra. Calcula la verosimilitud marginal con un filtro de partículas y compara el ajuste dentro de la muestra y el rendimiento de pronóstico fuera de la muestra con otros tres modelos, a saber, un modelo autorregresivo vectorial gaussiano, un modelo autorregresivo vectorial con error t de Student y un modelo autorregresivo vectorial con volatilidad estocástica. Las variables que usan son: Crecimiento de producción industrial, tasa de inflación, tasa de interés a corto plazo y el índice SP500 de Estados Unidos. El modelo que proponen es de la siguiente manera

$$\begin{aligned} Y_t &= V + A_1 Y_{t-1} + \dots + A_k Y_{t-k} + \Sigma_t^{1/2} \varepsilon_t, & \varepsilon_t &\sim N(0, I_p), \\ \Sigma_t &= B^{-1} H_t (B^{-1})^T, \\ H_t &= \text{diag} \left(\frac{h_{1t}^2}{\lambda_{1,t}}, \dots, \frac{h_{pt}^2}{\lambda_{p,t}} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\ln(h_{it}) = \ln(h_{i,t-1}) + \eta_{it}, \quad \eta_{it} \sim N(0, \sigma_i),$$

donde Y_t son vectores observados de dimensión $p \times 1$, V es un vector intersección de dimensión $p \times 1$, A_i , $i = 1, \dots, k$ son matrices de coeficientes de dimensión $p \times p$. B es una matriz triangular inferior. Chiu et al., 2017 comentan que en su modelo propuesto la volatilidad estocástica pretende capturar la posible heteroscedasticidad de los shocks y las posibles no linealidades en las relaciones no dinámicas de las variables del modelo, que están relacionadas con los cambios de baja frecuencia en la volatilidad. La introducción de la t -student en la estructura del shock pretende capturar cambios de alta frecuencia en la volatilidad que a menudo son de magnitudes extremas, por lo que potencialmente brindan un tratamiento de valores atípicos y eventos extremos.

Ding et al., 2021 extienden el modelo autorregresivo vectorial con parámetros variando en el tiempo y volatilidad estocástica de Primiceri, 2005 introduciendo volatilidades estocásticas variables en el tiempo basadas en los shocks de Omori et al., 2007 y Nakajima, 2011. Los choques son modelados de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \beta_{t+1} &= \beta_t + W_t, \\ \lambda_{t+1} &= \lambda_t + \varrho_t, \\ h_{t+1} &= h_t + \eta_t. \end{aligned} \quad (9)$$

Ding et al., 2021 comentan que su modelo tiene la ventaja de que refleja tanto la respuesta impulso en cada punto en el tiempo como las relaciones variables en el tiempo no lineales simultáneas entre las variables durante todo el período de la muestra. Usan su modelo para estudiar los impactos de las incertidumbres financieras y geopolíticas en los mercados de productos básicos en un marco variable en el tiempo.

Metodología

En esta sección presentamos la metodología de la investigación. En la primera parte proponemos un modelo autorregresivo vectorial con volatilidad estocástica multivariada en el que los choques de las variables endógenas en el tiempo t están correlacionados con los choques de la volatilidad en el tiempo $t + 1$. Además, presentamos una breve interpretación de los parámetros del modelo. Luego se presenta el método que se usa en esta investigación para estimar los parámetros. Después presentamos un ejemplo con datos simulados con el modelo propuesto con el fin de demostrar la eficiencia del método de estimación del modelo propuesto. Por último, presentamos un ejemplo con datos reales.

El enfoque de la investigación es cuantitativo debido a que este tipo de enfoque permite recoger y analizar datos. Los datos son recolectados de fuentes oficiales y posteriormente se obtuvieron resultados aplicando el modelo que se propone. Este modelo nos permite medir las relaciones dinámicas de las variables, así como la evolución de la volatilidad a través del tiempo.

El alcance de la investigación es considerado causal. Dicho enfoque permitirá determinar las relaciones dinámicas que existen entre las variables, así como la evolución de la volatilidad a través del tiempo. La investigación causal en este artículo se puede comprender en tres partes: En primer lugar, conocer el efecto que pueden producir las observaciones pasadas de las variables involucradas en las observaciones actuales. En segundo lugar, medir la influencia en la que una variable puede afectar a otra. Por último, determinar si una variable puede afectar el futuro de otra a corto plazo.

El diseño empleado para esta investigación fue no experimental de tipo longitudinal, debido a que se centra en el estudio de series de tiempo históricas para determinar las relaciones dinámicas y la evolución de la volatilidad entre el periodo de enero de 1948 y diciembre del 2019. En este tipo de estudio no se crean muestras de estudio ya que las variables ya existen.

Modelo Autorregresivo Vectorial con Volatilidad Estocástica Multivariada

En esta parte proponemos el modelo autorregresivo vectorial con volatilidad estocástica multivariada. La volatilidad modelada es la propuesta por Ishihara & Omori, 2012. La volatilidad estocástica pretende capturar la posible heteroscedasticidad de los choques y las posibles no linealidades en las relaciones simultáneas entre las variables del modelo (ver Primiceri, 2005). El modelo es de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 y_t &= v + A_1 y_{t-1} + \dots + A_k y_{t-k} + V_t^{1/2} \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n, \\
 \alpha_{t+1} &= \Phi \alpha_t + \eta_t, \quad t = 1, \dots, n-1, \\
 \alpha_1 &\sim N_p(0, \Sigma_0), \\
 V_t &= \text{diag}(\exp(\alpha_{1t}), \dots, \exp(\alpha_{pt})), \\
 \Phi &= \text{diag}(\phi_1, \dots, \phi_p), \\
 \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \eta_t \end{pmatrix} &\sim N(0, \Sigma), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{\varepsilon\varepsilon} & \Sigma_{\varepsilon\eta} \\ \Sigma_{\eta\varepsilon} & \Sigma_{\eta\eta} \end{pmatrix}, \\
 \text{vec}(\Sigma_0) &= (I_{p^2} - \Phi \otimes \Phi)^{-1} \text{vec}(\Sigma_{\eta\eta}), \\
 \text{donde } \alpha_t &= h_t - \mu \text{ es de dimensión } p \times 1. \quad h_t \text{ es el correspondiente vector de log} \\
 \text{volatilidad y } \mu &\text{ es el vector de media. La ecuación } \text{vec}(\Sigma_0) = (I_{p^2} - \Phi \otimes \Phi)^{-1} \text{vec}(\Sigma_{\eta\eta}) \text{ asegura}
 \end{aligned} \tag{10}$$

la estacionariedad de $\alpha_{t+1} = \Phi \alpha_t + \eta_t$. El vector v es un término de intercepción de dimensión $p \times 1$ mientras que $A_i, i = 1, \dots, k$ son matrices de coeficientes de dimensión $p \times p$. El operador vec convierte una matriz $A = [a_1, \dots, a_p]$, a_i es de dimensión $p \times 1$, $i = 1, \dots, p$, en un vector $(a_1^T, \dots, a_p^T)^T$ de dimensión $p^2 \times 1$. El operador $\otimes$ es el producto kronecker. I_p es la matriz identidad de orden p .

La matriz $\Sigma_{\varepsilon\varepsilon}$ captura la posible correlación entre los choques de las variables endógenas. Se diseñó de esta manera para capturar las posibles relaciones lineales entre ellas. De igual manera, la matriz $\Sigma_{\eta\eta}$ captura la posible correlación entre los choques de la volatilidad. La matriz $\Sigma_{\varepsilon\eta}$ captura la posible correlación entre los choques de las variables endógenas en el tiempo t con los choques de la volatilidad en el tiempo $t + 1$. En finanzas a este efecto se le conoce como efecto de apalancamiento cruzado. En macroeconomía normalmente se supone que los choques de la volatilidad son independientes de los choques de las variables endógenas. Sin embargo, reciente evidencia muestra que muchos choques económicos pueden afectar tanto el nivel como la varianza condicional (ver, por ejemplo, Mumtaz, 2018). Las matrices de coeficientes están diseñadas para capturar la dependencia lineal de las observaciones pasadas en las observaciones actuales.

Los elementos de $\phi_i, i = 1, \dots, p$, de la matriz Φ miden la persistencia de los choques de la volatilidad y en el modelo propuesto $-1 < \phi_i < 1$. La persistencia de los choques a la volatilidad es el efecto del choque actual sobre el pronóstico de la volatilidad y eventualmente desaparece. La vida media de un choque viene dada por $-\frac{\log(2)}{\log|\phi_i|}$, que, en series de tiempo mensuales, es el número de meses transcurridos para que el impacto del choque se reduzca a la mitad. Cuando ϕ_i es cercano a uno y $\sigma_{ii,\eta\eta}$ es cercano a cero, la evolución de la volatilidad de una serie de tiempo es muy suave. Un mes en el que $\alpha_t = 0$ puede ser visto como un mes normal y su volatilidad es igual a $\exp\left(\frac{\alpha_t}{2}\right) = \exp(0) = 1$.

Para encontrar la función verosimilitud del modelo de las ecuaciones (10) se hace una leve modificación a la función verosimilitud de Ishihara & Omori, 2012 reescribiéndolo de la siguiente manera

$$y_t = (Y_t^T \otimes I_p) \beta + V_t^{1/2} \varepsilon_t, \quad (11)$$

donde $Y_t = [1, y_{t-1}^T, \dots, y_{t-k}^T]^T$ es de dimensión $(kp + 1) \times 1$ y, $\beta = \text{vec}(v, A_1, \dots, A_k)$ es de dimensión $(kp^2 + p) \times 1$.

Luego se define $\theta = (\phi, \Sigma, \beta)$, $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)^T$, $\alpha = (\alpha_1^T, \dots, \alpha_n^T)^T$, $Y^n = (y_1, \dots, y_n)$, $Y^k = (y_{-k+1}, \dots, y_0)$ y $1_p = [1, \dots, 1]^T$, y se obtiene

$$f(\alpha, Y^n | \theta, Y^k) = f(y_n | \alpha_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k}, \theta) \prod_{t=1}^{n-1} f(y_t, \alpha_{t+1} | \alpha_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-k}, \theta) f(\alpha_t | \alpha_1, \dots, \alpha_t) \quad (12)$$

$$\propto |\Sigma_0|^{-1/2} |\Sigma|^{-(\frac{n-1}{2})} |\Sigma_{\varepsilon\varepsilon}|^{-1/2} \exp \left\{ \sum_{t=1}^n \ell_t - \frac{1}{2} \alpha_1^T \Sigma_0^{-1} \alpha_1 - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{n-1} (\alpha_{t+1} - \Phi \alpha_t)^T \Sigma_{\eta\eta}^{-1} (\alpha_{t+1} - \Phi \alpha_t) \right\}$$

donde

$$\begin{aligned}
\ell_t &= \text{const} - \frac{1}{2} 1_p^T \alpha_T - \frac{1}{2} \left(y_t - \left((Y_t^T \otimes I_p) + \mu_t \right) \right)^T \Sigma_t^{-1} \left(y_t - \left((Y_t^T \otimes I_p) + \mu_t \right) \right), \\
\mu_t &= V_t^{1/2} m_t, \\
\Sigma_t &= V_t^{1/2} S_t V_t^{1/2}, \\
m_t &= \begin{cases} \Sigma_{\varepsilon\eta} \Sigma_{\eta\eta}^{-1} (\alpha_{t+1} - \Phi \alpha_t), & t < n, \\ 0, & t = n, \end{cases} \\
S_t &= \begin{cases} \Sigma_{\varepsilon\varepsilon} - \Sigma_{\varepsilon\eta} \Sigma_{\eta\eta}^{-1} \Sigma_{\eta\varepsilon}, & t < n, \\ \Sigma_{\varepsilon\varepsilon}, & t = n. \end{cases}
\end{aligned} \tag{13}$$

Método de Estimación

Para estimar los parámetros se usa la inferencia bayesiana calculando las distribuciones a posteriori por medio del algoritmo MCMC de seis bloques que es dado por

Inicializar α, ϕ, Σ y β .

Generar $\alpha | \phi, \Sigma, \beta, Y^n, Y^k$.

Generar $\phi | \Sigma, \beta, \alpha, Y^n, Y^k$.

Generar $\Sigma | \beta, \alpha, \phi, Y^n, Y^k$.

Generar $\beta | \alpha, \phi, \Sigma, Y^n, Y^k$.

Ir a 2.

Generación de α, ϕ y Σ

Para generar α se aplica el método multi-move de Ishihara & Omori, 2012 sustituyendo y_t por $y_t^* = y_t - (Y_t^T \otimes I_p) \hat{\beta}$. Ishihara & Omori, 2012 dividen $\alpha = (\alpha_1^T, \dots, \alpha_n^T)^T$ en $K + 1$ bloques usando el algoritmo de Shephard & Pitt, 1997. Encuentran la distribución completa de densidad conjunta condicional de las perturbaciones del i -ésimo bloque y usan expansión de Taylor de segundo orden alrededor de la moda y la aproximan a una densidad normal que se usa para el algoritmo de Aceptación-Rechazo (AR).

Debido a que la dimensión de la matriz de covarianza crece cuando el tamaño de los bloques crece convierten la densidad normal aproximada en un modelo de espacios de estados auxiliar. Aplican el suavizador de perturbaciones de Koopman, 1993 repetidas veces al modelo de espacios de estado auxiliar para encontrar la moda y obtienen un modelo de espacios de estado gaussiano lineal aproximado. Por último, aplican un algoritmo de Metrópolis-Hastings de Aceptación-Rechazo (AR-MH) en el que se utiliza un simulador de perturbaciones (Jong & Shephard, 1995; Durbing & Koopman, 2002) al modelo de espacios de estado gaussiano lineal aproximado para generar un candidato.

En el caso de Σ y ϕ se sustituye y_t por $y_t^* = y_t - (Y_t^T \otimes I_p) \hat{\beta}$ y se aplican los algoritmos MH de Ishihara & Omori, 2012 encontrando sus respectivas funciones de densidad de probabilidad posterior condicional. Para más detalles sobre el algoritmo de multi-move y los algoritmos MH de Σ y ϕ (ver Ishihara & Omori, 2012).

Generación de β

La distribución priori $f(\beta)$ de β es la de Litterman (ver Doan et al., 1984 y Litterman, 1986) que corresponde a una distribución normal multivariante con media priori μ_β y matriz de covarianza priori Σ_β . La priori de Litterman en este artículo configura $\mu_\beta = 0$ y $\Sigma_\beta \neq 0$. Esto

significa que se cree que la dependencia interporal de las variables es débil. La matriz de covarianza priori Σ_β es configurada como una matriz diagonal de la siguiente manera

$$\Sigma_{\beta,ij,l} = \begin{cases} \left(\frac{\bar{\lambda}}{l}\right)^2 & \text{si } i = j, \\ \left(\frac{\bar{\lambda}\bar{\theta}\sigma_i}{l\sigma_j}\right)^2 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \quad (14)$$

donde $\Sigma_{\beta,ij,l}$ es la varianza priori de A_{ij} del rezago l , $\bar{\lambda}$ es la desviación estándar priori de los coeficientes $A_{\ell\ell,1}$, $\ell = 1, 2, \dots, p$, $0 < \bar{\theta} < 1$ y, σ_i^2 es el elemento de la i -ésima diagonal de $\Sigma_{\varepsilon\varepsilon}$. La función de densidad de probabilidad posterior de β es dada por

$$\begin{aligned} f(\beta|\alpha, \phi, \Sigma, Y^n, Y^k) &\propto f(\alpha, Y^n|\phi, \Sigma, \beta, Y^k) f(\beta) \\ &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}(\beta - \mu_\beta^*)^T \Sigma_\beta^{*-1}(\beta - \mu_\beta^*)\right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

donde

$$\Sigma_\beta^* = \left[\sum_{t=1}^n (Y_t \otimes I_p)^T \Sigma_t^{-1} (Y_t \otimes I_p) + \Sigma_\beta^{-1} \right]^{-1}, \quad \mu_\beta^* = \Sigma_\beta^* \left[\sum_{t=1}^n (Y_t \otimes I_p) \Sigma_t^{-1} (y_t - \mu_t) \right].$$

Se usa el algoritmo de muestreador de Gibbs para generar una muestra de $\beta^* \sim N(\mu_\beta^*, \Sigma_\beta^*)$. μ_β es configurada igual a cero.

Selección del Orden VAR-MSV

Para escoger el mejor modelo Ishihara & Omori, 2012 para cada modelo estimado, calculan el Criterio de Información de Desviación (DIC) de Spiegelhalter et al., 2002. La medida DIC es definido por

$$\text{DIC} = E_{\theta|Y^n}[D(\theta)] + P_D, \quad (16)$$

donde

$$P_D = E_{\theta|Y^n}[D(\theta)] - D(E_{\theta|Y^n}[\theta]), \quad D(\theta) = -2\log f(Y^n|\theta). \quad (17)$$

Para calcular $E_{\theta|Y^n}[D(\theta)]$ se puede aproximar mediante $\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M D(\theta^{(m)})$, $\theta^{(m)}$ son remuestreados a partir de la distribución posterior. El error estándar del estimador es obtenido estimando repetidamente $E_{\theta|Y^n}[D(\theta)]$. $D(E_{\theta|Y^n}\theta)$ es igual a $D(\theta)$ evaluado en la media posterior. Ishihara & Omori, 2012 configuraron $M = 100$, $I = 10000$ y repitieron 10 veces $E_{\theta|Y^n}[D(\theta)]$ para obtener el error estándar. Utilizan el filtro de partículas auxiliar propuesto por Shephard & K.Pitt, 1999 para calcular la función verosimilitud ordinaria dado los parámetros $\log f(Y^n|\theta)$ (Para una comprensión detallada del filtro de partículas ver Ishihara & Omori, 2012).

Para escoger el mejor orden VAR-MSV se aplican los siguientes pasos:

1. Suponiendo que se sabe que el orden VAR-MSV no puede exceder un entero K_1 se procede a estimar los modelos VAR-MSV comenzando desde 0 hasta K_1 y se almacenan sus parámetros estimados $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{K_1}$, donde θ_i son los parámetros estimados del modelo i .
2. Para cada modelo se sustituye y_t por $y_t^* = y_t - (Y_t^T \otimes I_p)\hat{\beta}^i$, donde $\hat{\beta}^i$ son las matrices de coeficientes estimadas del modelo i . Luego se procede a calcular la correspondiente función verosimilitud ordinaria dado los parámetros $\log f(Y^n|\theta_i)$

(ver Ishihara & Omori, 2012) y se procede a calcular la medida DIC para cada modelo.

3. Se escoge el modelo que tenga la menor medida DIC.

Ejemplo Ilustrativo Usando Datos Simulados

En esta sección se aplica el método propuesto usando datos simulados para observar que tan bien se estiman los parámetros. Para este trabajo, nuestros resultados computacionales se generaron usando el software libre R.

Los datos son simulados usando el modelo (10). El orden del modelo MSV-VAR que se usa para simular datos es $k = 4$ y la dimensión es $p = 3$. La matriz de covarianza Σ es tomada de Ishihara & Omori, 2012. Los parámetros Σ , Φ y el término de intercepción v así como las matrices de coeficientes son dados por

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1.44 & 0.864 & 0.864 & -0.096 & -0.072 & -0.072 \\ 0.864 & 1.44 & 0.864 & -0.072 & -0.096 & -0.072 \\ 0.864 & 0.864 & 1.44 & -0.072 & -0.072 & -0.096 \\ -0.096 & -0.072 & -0.072 & 0.04 & 0.028 & 0.028 \\ -0.072 & -0.096 & -0.072 & 0.028 & 0.04 & 0.028 \\ -0.072 & -0.072 & -0.096 & 0.028 & 0.028 & 0.04 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0.95 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0 \\ 0 & 0 & 0.95 \end{bmatrix},$$

$$v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0.13 & 0.09 & 0.09 \\ 0.09 & 0.13 & 0.09 \\ 0.09 & 0.09 & 0.13 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.11 & 0.07 & 0.07 \\ 0.07 & 0.11 & 0.07 \\ 0.07 & 0.07 & 0.11 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.09 & 0 & 0 \\ 0 & 0.09 & 0 \\ 0 & 0 & 0.09 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0.07 & 0 & 0 \\ 0 & 0.07 & 0 \\ 0 & 0 & 0.07 \end{bmatrix}$$

Los hiperparámetros de la distribución priori ϕ son los usuales de la literatura, donde $a_i = 20, i = 1, \dots, p$; $b_i = 1.5, i = 1, \dots, p$. Para los hiperparámetros de la distribución priori Σ se configuró $n_0 = 2p$, mientras que para R_0 se usó $R_0 = (10\Sigma^*)^{-1}$ donde Σ^* es la matriz de covarianza verdadera. Para los hiperparámetros de la priori de Litterman son los usuales de la literatura, $\mu_\beta = 0$ mientras que $\bar{\theta} = 0.2$ y $\bar{\lambda} = 0.5$, mientras que los elementos $\sigma^2_i, i = 1, \dots, p$, son tomados de la diagonal de la varianza estimada de $\Sigma_{\varepsilon\varepsilon}^{(i)}$ variando por iteración.

Para asegurar la precisión de los parámetros estimados se generan 3,000 observaciones, donde las primeras 4 observaciones son tomadas como valores premuéstrales mientras que los últimos 2,996 serán tomados como la muestra. Se aplica el método de estimación propuesto de la metodología y se generan 120,000 muestras, luego se descartan las primeras 20,000. Para el parámetro de ajuste se usa $K = 0.03n$ y para evitar que el método se atasque firmemente debido al rechazo excesivo se sigue la sugerencia de Shephard & Pitt, 1997 incrementando K unas pocas iteraciones en intervalos regulares.

Aplicación a Datos Macroeconómicos y Financieros

En este apartado se aplica el modelo VAR-MSV de (10) a datos de series de tiempo macroeconómicas clave para los Estados Unidos. La primera variable es y_{Pit} = Producción Industrial: Índice total (Ajustado estacionalmente). Esta variable mide la producción real de sectores como la minería, la manufactura, servicios públicos de electricidad y gas. Se escogió esta

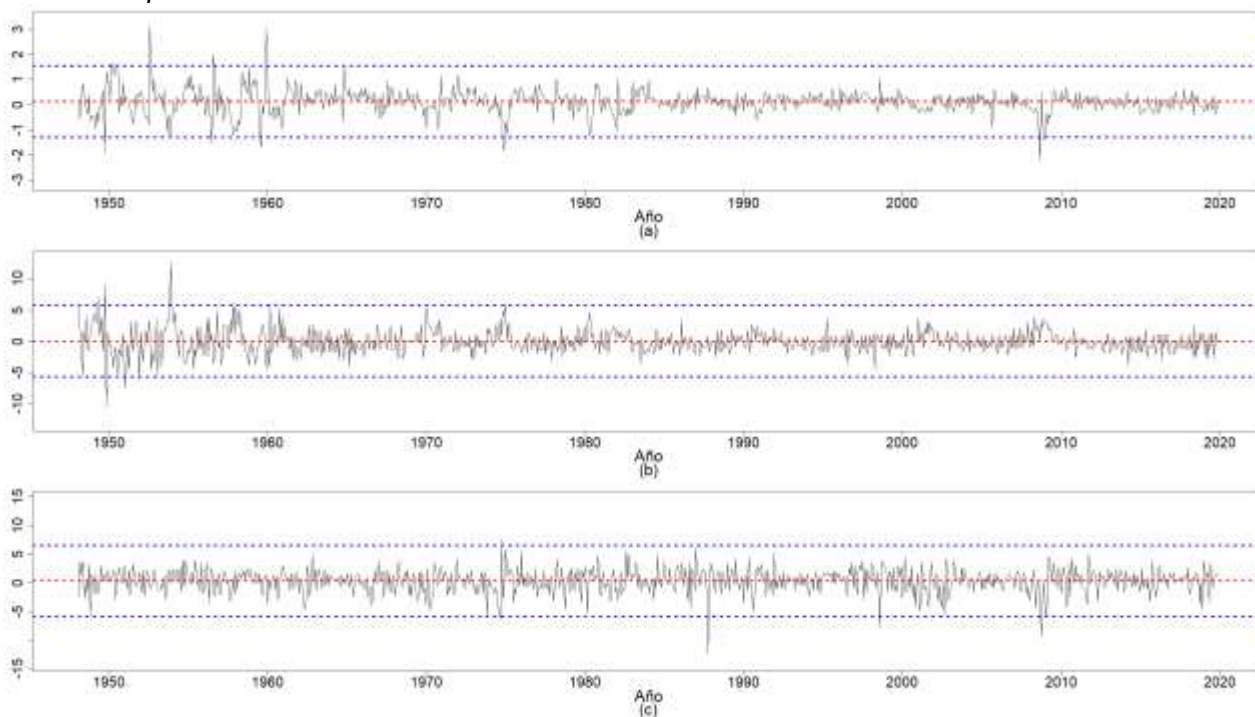
variable porque se cree que los cambios en la demanda agregada conducen a que la industria cambie su producción implicando cambios en la demanda de mano de obra que alteran las tasas de desempleo.

La segunda variable es y_{TDt} = Tasa de Desempleo (Ajustada estacionalmente). Mide el número de personas que buscan activamente trabajo sin encontrarlo, como porcentaje o fracción de la fuerza laboral total. Se escogió esta variable debido a que, según la teoría económica, la mayoría de las personas obtienen la mayor parte de sus ingresos trabajando en una profesión. Con estos ingresos las personas compran bienes y servicios a las empresas. A su vez, una parte de los ingresos recibidos por las empresas se distribuye en el pago de los salarios de los trabajadores. Por último, la tercera variable es y_{SPt} = Índice del mercado de valores SP500. Es un indicador del mercado de acciones e incluye 500 empresas. Agregamos esta variable por la evidencia de que muchas recesiones (por ejemplo, la Gran Recesión 2007-2009) son producidas por choques provenientes del mercado financiero.

Los datos son de frecuencia mensual abarcando un periodo desde enero de 1948 hasta diciembre del 2019, consistiendo en 863 observaciones. Se usa la ecuación $r_t = 50 \log \left(\frac{y_t}{y_{t-1}} \right)$ para convertir las observaciones a rendimientos consistentes en: r_{PIt} = Rendimiento de la Producción Industrial: Índice total (Ajustado estacionalmente) y r_{TDt} = Rendimiento de la Tasa de Desempleo (Ajustada estacionalmente). Agregamos el r_{SPt} = Rendimiento del Índice del mercado de valores SP500.

Figura 1

Gráficos temporales mensuales de los rendimientos desde febrero de 1948 hasta diciembre de 2019 de: (a) Producción Industrial, (b) Tasa de Desempleo, (c) Índice del mercado de valores SP500. La línea roja es la media de la serie mientras que la línea azul es tres veces la desviación estándar respecto a la media.



En la

Figura 1 se pueden observar los gráficos temporales mensuales de los rendimientos de Producción Industrial, Tasa de Desempleo y el Índice SP500. Se puede observar que algunos rendimientos superan la línea azul que representa 3 veces la desviación estándar respecto a la media y se observan 15 en la primera serie, 10 en la segunda serie y 6 en la tercera serie. Por otro lado, se pueden observar periodos de tiempo (por ejemplo, 1948-1963, 1963-1983 y 2006-2009) donde la variabilidad de los rendimientos es mayor que en otros periodos de tiempo por lo que puede ser considerado como evidencia de que en esos periodos hay mayor volatilidad.

Para aportar mayor evidencia a cada serie de rendimientos se le cálculo el exceso de curtosis. El exceso de curtosis puede ser positivo o negativo. Cuando los datos presentan exceso de curtosis positivo es evidencia de colas pesadas. Los datos con colas pesadas son un indicador de que hay rendimientos con valores muy grandes en relación con los demás. Los rendimientos muy grandes en relación con los demás son conocidos como valores atípicos o valores extremos por lo que un modelo VAR integrado con volatilidad estocástica multivariada se ajustara a los datos de manera más adecuada. El exceso de curtosis de cada serie temporal es: 5.86, 4.87 y 2.36 respectivamente. En nuestros datos podemos ver que existe evidencia de colas pesadas en todas las variables, esto se puede observar por el coeficiente de exceso de curtosis de todas las series de rendimientos es superior a cero.

Los hiperparámetros de la distribución priori ϕ son los que se usaron en la sección previa. Para los hiperparámetros de la distribución priori Σ se configuró $n_0 = 2p$, mientras que para R_0 se configuró una matriz cuyos elementos fuera de la diagonal son igual a cero y los elementos de la diagonal se configuran $r_{0ii} = \sigma^2_{\varepsilon_i}$, $i = 1, \dots, p$, donde $\sigma^2_{\varepsilon_i}$ es la varianza tomada de un modelo AR(k) para cada variable y_i y $r_{0ii} = \sigma^2_{\eta_i}$, $i = p + 1, \dots, 2p$, donde $\sigma^2_{\eta_i}$ es la correspondiente volatilidad de la variable y_i tomada de un modelo de volatilidad estocástica univariado (SV). Para los hiperparámetros de la priori de Litterman se configura $\mu_\beta = 0$, $\bar{\theta} = 0.2$, $\bar{\lambda} = 0.5$ y los elementos $\sigma^2_i = \sigma^2_{\varepsilon_i}$, $i = 1, \dots, p$.

Se aplica el método de estimación propuesto de la metodología y se generan 120,000 muestras, luego se descartan las primeras 20,000. Para el parámetro de ajuste se usa $K = 0.03n$ y para evitar que el método se atasque firmemente debido al rechazo excesivo se sigue la sugerencia de Shephard & Pitt, 1997 incrementando K unas pocas iteraciones en intervalos regulares.

Se estimaron tres configuraciones de modelos: VAR(3)-MSV, VAR(4)-MSV y VAR(5)-MSV. Para escoger el mejor modelo se usó el criterio DIC discutido en la metodología.

Fuentes de datos

El conjunto de datos que usamos en este artículo consiste de dos variables macroeconomías clave de los Estados Unidos consistentes en: (a) Producción Industrial: Índice Total (ajustado estacionalmente) y (b) Tasa de Desempleo (ajustada estacionalmente). Estas dos variables están en serie de tiempo mensuales y fueron obtenidas de Federal Reserve Economic Data³. Nuestro conjunto de datos también cuenta con una variable financiera consistente en: Índice del mercado de valores SP500. Esta variable está en serie de tiempo mensual y fue obtenida del proveedor múltiple de datos económicos multpl⁴.

³ <https://fred.stlouisfed.org/>

⁴ <https://www.multpl.com/s-p-500-historical-prices/table/by-month>

Resultados

En esta sección comentaremos los resultados encontrados en el ejemplo con datos simulados y la aplicación a datos macroeconómicos y financieros.

Resultados del Ejemplo con Datos Simulados

Las tablas **Tabla 1** y **Tabla 2** muestran el parámetro verdadero, la media posterior (parámetro estimado) e intervalos de credibilidad del 95% de los elementos de la matriz Φ , la matriz de covarianza Σ , el término de intercepción v y las matrices de coeficientes A_1, A_2, A_3 y A_4 . Se puede observar que los parámetros estimados están muy cerca de los parámetros verdaderos. Además, todos los intervalos de credibilidad con un 95% de confianza contienen los parámetros verdaderos. Por lo cual, podemos notar que en general, con una muestra de tamaño 3000 las medias posteriores capturan el comportamiento de los parámetros con sus respectivos signos.

Tabla 1

Media posterior e Intervalos de credibilidad del 95% de los elementos de la matriz Φ y la matriz de covarianza Σ .

	Parámetro	Media	Intervalo de Credibilidad del 95%
ϕ_1	0.95	0.938	[0.918,0.955]
ϕ_2	0.95	0.943	[0.926,0.958]
ϕ_3	0.95	0.945	[0.926,0.958]
σ_{11}	1.44	1.498	[1.337,1.675]
σ_{12}	0.864	0.894	[0.792,1.007]
σ_{13}	0.864	0.882	[0.78,0.994]
σ_{14}	-0.096	-0.082	[-0.115,-0.052]
σ_{15}	-0.072	-0.067	[-0.098,-0.038]
σ_{16}	-0.072	-0.07	[-0.103,-0.039]
σ_{21}	0.864	0.894	[0.792,1.007]
σ_{22}	1.44	1.509	[1.339,1.695]
σ_{23}	0.864	0.886	[0.782,1]
σ_{24}	-0.072	-0.072	[-0.104,-0.042]
σ_{25}	-0.096	-0.109	[-0.143,-0.077]
σ_{26}	-0.072	-0.067	[-0.099,-0.035]
σ_{31}	0.864	0.882	[0.78,0.994]
σ_{32}	0.864	0.886	[0.782,1]
σ_{33}	1.44	1.422	[1.251,1.611]
σ_{34}	-0.072	-0.05	[-0.08,-0.021]
σ_{35}	-0.072	-0.067	[-0.097,-0.038]
σ_{36}	-0.096	-0.08	[-0.114,-0.048]
σ_{41}	-0.096	-0.082	[-0.115,-0.052]
σ_{42}	-0.072	-0.072	[-0.104,-0.042]
σ_{43}	-0.072	-0.05	[-0.08,-0.021]
σ_{44}	0.4	0.039	[0.027,0.055]
σ_{45}	0.028	0.031	[0.022,0.042]

σ_{46}	0.028	0.028	[0.019,0.038]
σ_{51}	-0.072	-0.067	[-0.098,-0.038]
σ_{52}	-0.096	-0.109	[-0.143,-0.077]
σ_{53}	-0.072	-0.067	[-0.097,-0.038]
σ_{54}	0.028	0.031	[0.022,0.042]
σ_{55}	0.4	0.039	[0.028,0.054]
σ_{56}	0.028	0.028	[0.019,0.039]
σ_{61}	-0.072	-0.07	[-0.103,-0.039]
σ_{62}	-0.072	-0.067	[-0.099,-0.035]
σ_{63}	-0.096	-0.08	[-0.114,-0.048]
σ_{64}	0.028	0.028	[0.019,0.038]
σ_{65}	0.028	0.028	[0.019,0.039]
σ_{66}	0.4	0.41	[0.029,0.057]

Fuente: Elaboración Propia.

Tabla 2

Media posterior e Intervalos de credibilidad del 95% de los elementos del vector término intersección v y las matrices de coeficientes A_1 , A_2 , A_3 y A_4 .

	Parámetro	Media	Intervalo de Credibilidad del 95%
v_1	0	0.028	[-0.014,0.071]
A_{11}^1	0.13	0.166	[0.119,0.213]
A_{12}^1	0.09	0.101	[0.056,0.146]
A_{13}^1	0.09	0.665	[0.021,0.11]
A_{11}^2	0.11	0.084	[0.04,0.127]
A_{12}^2	0.07	0.062	[0.022,0.102]
A_{13}^2	0.07	0.067	[0.027,0.108]
A_{11}^3	0.09	0.076	[0.035,0.117]
A_{12}^3	0	0.009	[-0.025,0.044]
A_{13}^3	0	0	[-0.035,0.035]
A_{11}^4	0.07	0.079	[0.041,0.116]
A_{12}^4	0	-0.002	[-0.033,0.028]
A_{13}^4	0	-0.006	[-0.037,0.024]
v_2	0	0.002	[-0.039,0.044]
A_{21}^1	0.09	0.092	[0.047,0.137]
A_{22}^1	0.13	0.107	[0.059,0.154]
A_{23}^1	0.09	0.089	[0.044,0.134]
A_{21}^2	0.07	0.056	[0.015,0.096]
A_{22}^2	0.11	0.136	[0.092,0.18]
A_{23}^2	0.07	0.075	[0.035,0.115]
A_{21}^3	0	0.004	[-0.03,0.04]
A_{22}^3	0.09	0.066	[0.026,0.106]

A_{23}^3	0	-0.001	[-0.037,0.033]
A_{21}^4	0	0.021	[-0.01,0.051]
A_{22}^4	0.07	0.05	[0.012,0.089]
A_{23}^4	0	0.005	[-0.025,0.036]
v_3	0	0.019	[-0.021,0.061]
A_{31}^1	0.09	0.077	[0.034,0.12]
A_{32}^1	0.09	0.107	[0.064,0.151]
A_{33}^1	0.13	0.118	[0.071,0.165]
A_{31}^2	0.07	0.077	[0.038,0.116]
A_{32}^2	0.07	0.061	[0.022,0.099]
A_{33}^2	0.11	0.091	[0.048,0.135]
A_{31}^3	0	-0.028	[-0.062,0.006]
A_{32}^3	0	-0.018	[-0.051,0.015]
A_{33}^3	0.09	0.126	[0.085,0.166]
A_{31}^4	0	0.01	[-0.019,0.04]
A_{32}^4	0	-0.008	[-0.038,0.021]
A_{33}^4	0.07	0.075	[0.036,0.113]

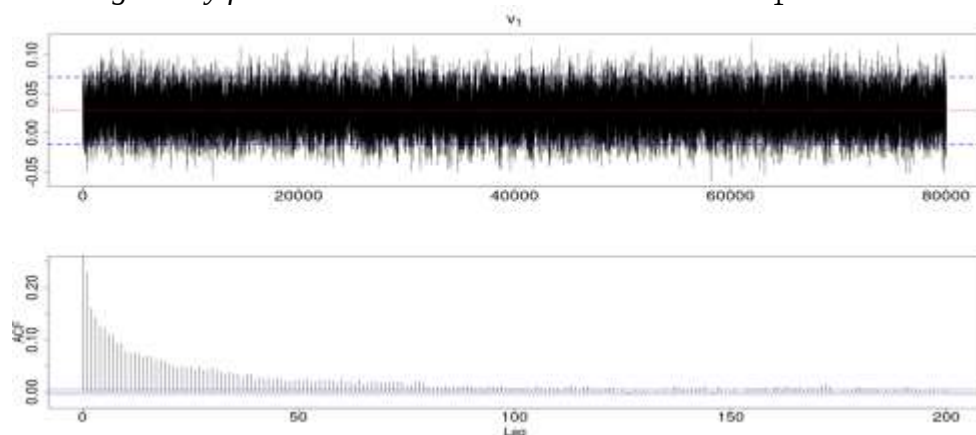
Fuente: Elaboración propia.

La **Figura 2** muestra el gráfico de convergencia y la función de autocorrelación de las muestras generadas por la distribución condicional completa del parámetro v_1 . Se puede observar en el gráfico de convergencia que las muestras varían en un rango fijo por lo que es un indicador fuerte de convergencia. Por otro lado, su función de autocorrelación alcanza su máximo en 0.228, además, decrece lentamente mostrando la alta dependencia de valores pasados. Esto puede ser debido a la priori de Litterman, ya que las varianzas priori son infinitas para $v_i, i = 1, \dots, p$, reflejando que no se tiene ninguna conjetura a priori para estos coeficientes. Los demás elementos del término intercepción $v_i, i = 2, \dots, p$, muestran el mismo comportamiento.

La **Figura 3** muestra el gráfico de convergencia y la función de autocorrelación de las muestras generadas por la distribución condicional completa del parámetro A_{33}^4 . De igual manera que el parámetro v_1 , se puede observar en el gráfico de convergencia que las muestras varían en un rango fijo por lo que es un indicador fuerte de convergencia. Su función de autocorrelación alcanza su máximo en 0.183, decreciendo rápidamente mostrando la poca dependencia de valores pasados. Los demás elementos de las matrices de coeficientes $A_{ij}^l, i, j = 2, \dots, p, l = 1, \dots, k$, muestran el mismo comportamiento. El diagnóstico de convergencia muestra que el enfoque bayesiano para estimar los parámetros es eficiente.

Figura 2

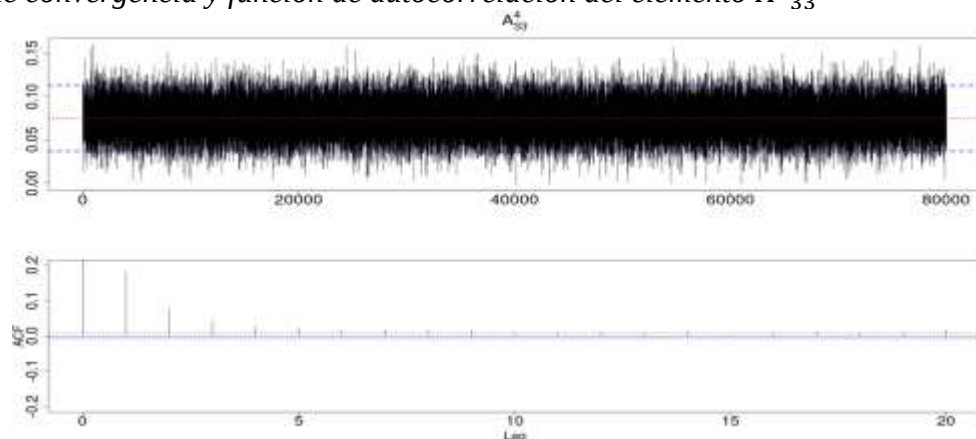
Gráfico de convergencia y función de autocorrelación del elemento v_1



Fuente: Elaboración propia.

Figura 3

Gráfico de convergencia y función de autocorrelación del elemento A^4_{33}



Fuente: Elaboración propia.

Resultados de la Aplicación con Datos Macroeconómicos y Financieros

En la tabla

Tabla 3 se muestran las medidas DIC y desviaciones estándar de los modelos VAR(3)-MSV, VAR(4)-MSV y VAR(5)-MSV. La medida DIC más grande corresponde al modelo VAR(3)-MSV y es igual a 4205.44. Se puede observar que a medida que el orden VAR-MSV crece su correspondiente medida DIC disminuye. La medida DIC más pequeña corresponde al modelo VAR(5)-MSV y es igual a 4116.41 sugiriendo que este modelo es el que se mejor se ajusta

a los datos para mostrar el comportamiento, relaciones dinámicas y evolución de la volatilidad de las variables involucradas.

Tabla 3

Estimadores, errores estándar, valores más grandes y valores más pequeños DIC de los modelos VAR(3)-MSV, VAR(4)-MSV y VAR(5)-MSV.

Modelo	VAR(3)-MSV	VAR(4)-MSV	VAR(5)-MSV
DIC	4205.44	4145.89	4116.41
Desviación estándar	0.3975	0.3369	0.5504
DIC _{max}	4206.22	4146.5	4117.41
DIC _{min}	4204.72	4145.45	4115.65

Fuente: Elaboración propia.

Las tablas **Tabla 4** y

Tabla 5 muestran la media posterior, desviación estándar e intervalos de credibilidad del 95% de los elementos de la matriz Φ , la matriz de covarianza Σ , el término de intercepción v y las matrices de coeficientes $A_1, A_2, \dots, A_5$. También estimamos los parámetros autorregresivos de otros dos diferentes modelos con el fin de comparar los parámetros estimados: (a) Un modelo autorregresivo vectorial bayesiano de orden cinco BVAR(5) que se estimó mediante la librería BVAR de R, (b) Un modelo VAR(5) frecuentista que se estimó mediante el método de Mínimos Cuadrados Multivariado (ver Lutkepohl, 2005) y se implementó en R.

Tabla 4

Media posterior, Desviación Estándar e Intervalos de credibilidad del 95% de los elementos de la matriz Φ y la matriz de covarianza Σ .

	Media	Desviación Estándar	Intervalo de Credibilidad del 95%
--	-------	---------------------	-----------------------------------

ϕ_1	0.8988	0.0954	[0.8279,0.9499]
ϕ_2	0.9823	0.0118	[0.9525,0.9977]
ϕ_3	0.8629	0.0457	[0.7547,0.9309]
σ_{11}	0.1162	0.0189	[0.0866,0.1608]
σ_{12}	-0.1607	0.0285	[-0.2232,-0.1114]
σ_{13}	-0.0185	0.0233	[-0.0647,0.0269]
σ_{14}	-0.0532	0.0145	[-0.0835,-0.0270]
σ_{15}	-0.0046	0.0067	[-0.0194,0.0072]
σ_{16}	-0.0042	0.0116	[-0.0273,0.0184]
σ_{21}	-0.1607	0.0285	[-0.2232,-0.1114]
σ_{22}	2.4824	0.4112	[1.7971,3.4164]
σ_{23}	-0.112	0.1045	[-0.3213,0.0901]
σ_{24}	0.1367	0.0641	[0.0150,0.2681]
σ_{25}	-0.0178	0.0305	[-0.0746,0.0483]
σ_{26}	0.0334	0.0592	[-0.0800,0.1526]
σ_{31}	-0.0185	0.0233	[-0.0647,0.0269]
σ_{32}	-0.112	0.1045	[-0.3213,0.0901]
σ_{33}	3.4246	0.3483	[2.8050,4.1710]
σ_{34}	0.0867	0.0757	[-0.0573,0.2406]
σ_{35}	-0.0006	0.0357	[-0.0732,0.0697]
σ_{36}	-0.2646	0.0746	[-0.4221,-0.1292]
σ_{41}	-0.0532	0.0145	[-0.0835,-0.0270]
σ_{42}	0.1367	0.0641	[0.0150,0.2681]
σ_{43}	0.0867	0.0757	[-0.0573,0.2406]
σ_{44}	0.2005	0.0563	[0.1116,0.3293]
σ_{45}	0.0193	0.0157	[-0.0041,0.0570]
σ_{46}	0.0086	0.0209	[-0.0308,0.0518]
σ_{51}	-0.0046	0.0067	[-0.0194,0.0072]
σ_{52}	-0.0178	0.0305	[-0.0746,0.0483]
σ_{53}	-0.0006	0.0357	[-0.0732,0.0697]
σ_{54}	0.0193	0.0157	[-0.0041,0.0570]
σ_{55}	0.0126	0.0073	[0.0042,0.0315]
σ_{56}	0.0008	0.0085	[-0.0168,0.0176]
σ_{61}	-0.0042	0.0116	[-0.0273,0.0184]
σ_{62}	0.0334	0.0592	[-0.0800,0.1526]
σ_{63}	-0.2646	0.0746	[-0.4221,-0.1292]
σ_{64}	0.0086	0.0209	[-0.0308,0.0518]
σ_{65}	0.0008	0.0085	[-0.0168,0.0176]
σ_{66}	0.113	0.0363	[0.0605,0.2023]

Fuente: Elaboración propia.

Lo primero que observamos es que las varianzas de la volatilidad estimada $\sigma_{ii} = \sigma_{ii,\eta\eta}$, $i = 1, \dots, 3$, varían entre 0.0126 y 0.2005. La varianza más grande corresponde a los rendimientos de la Producción Industrial y es $\sigma_{11,\eta\eta} = 0.2005$. Esto significa que existe la probabilidad de obtener choques de la volatilidad estimada relativamente grandes. Sin embargo, su correspondiente parámetro de persistencia es $\phi_1 = 0.8988$ lo que significa que un choque de la volatilidad pierde la mitad de su fuerza en aproximadamente 6.5 meses. Por lo que, un choque relativamente grande de la volatilidad perderá su fuerza rápidamente. Esto se puede evidenciar en la figura

Figura 4-(a) ya que los aumentos de la volatilidad decrecen rápidamente una vez que alcanzan su máximo. Por ejemplo, en enero de 1952 la volatilidad estimada era de 1.19 luego comenzó a crecer hasta alcanzar un máximo de 3.61 en agosto de 1952.

Si se ajustan la volatilidad estimada de los rendimientos de la Producción Industrial entre enero y agosto de 1952 a un modelo de regresión lineal se obtiene que la volatilidad estimada aumenta en un promedio aproximado de 0.32 por mes (el R^2 ajustado igual a 0.82). Luego de alcanzar el máximo, la volatilidad estimada comienza a decrecer hasta abril de 1953 alcanzando un mínimo de 1.19. De igual manera, ajustando los datos entre agosto de 1952 y abril de 1953 a un modelo de regresión lineal se obtiene que la volatilidad estimada decrece en un promedio aproximado de -0.25 por mes (el R^2 ajustado igual a 0.70).

La segunda varianza corresponde a los rendimientos de la Tasa de Desempleo y es $\sigma_{22,\eta\eta} = 0.0126$ y es la más pequeña y su correspondiente parámetro de persistencia es $\phi_2 = 0.9823$ y es el más grande y cercano a uno por lo que la evolución de la volatilidad de los rendimientos es muy suave. Esto se puede evidenciar en la figura

Figura 4-(b) ya que entre julio de 1948 y diciembre de 1954 la volatilidad estimada tiene aproximadamente un promedio de 1.87 con una desviación estándar de 0.12 por lo que no hay cambios bruscos. Luego, la volatilidad comienza a decrecer lentamente sin movimientos bruscos hasta alcanzar el 1 en el primer trimestre de 1965 (donde 1 significa que $\alpha_t = 0$, no hay volatilidad).

Ajustando la volatilidad estimada de la Tasa de Desempleo entre enero de 1955 y febrero de 1965 a un modelo de regresión lineal se obtiene que la volatilidad estimada decrece en un promedio de -0.005 por mes (el R^2 ajustado igual a 0.9). Finalizando el primer trimestre de 1965 hasta diciembre de 1984 la volatilidad estimada es inferior a 1 decreciendo lentamente hasta alcanzar un mínimo de 0.78 (excepto en algunos meses entre 1968-1970 donde la volatilidad estimada es un poco superior a 1).

Desde enero de 1985 hasta diciembre del 2011 la volatilidad estimada tiene un promedio aproximado de 0.76 con una desviación estándar de 0.07 reflejando poca variabilidad en la volatilidad estimada. Comenzando enero del 2011 hasta diciembre de 2019 la volatilidad estimada crece lentamente sin mostrar algún movimiento brusco y alcanza un máximo de 1.07 en el cuarto trimestre de 2019. Nuevamente, si ajustamos los datos entre enero del 2011 y diciembre del 2019 en un modelo de regresión lineal se obtiene un aumento en promedio de la volatilidad estimada de aproximadamente 0.003 por mes (el R^2 ajustado igual a 0.83).

La tercera varianza corresponde a los rendimientos del Índice SP500 y es $\sigma_{33,\eta\eta} = 0.1133$ y su correspondiente parámetro de persistencia es $\phi_3 = 0.8629$ y, es el parámetro de persistencia más pequeño. Por lo que, los choques de la volatilidad de los rendimientos del Índice SP500 pierden la mitad de su fuerza relativamente rápido, aproximadamente en 4.7 meses. Esto se puede observar en la figura

Figura 4-(c).

Por ejemplo, en marzo de 1972 la volatilidad estimada era de 0.7 y comenzó a aumentar hasta abril de 1974 en un promedio aproximado de 0.031 por mes (el R^2 ajustado igual a 0.91). Luego, la volatilidad estimada aumento en un promedio aproximado de 0.16 por mes hasta alcanzar un máximo de 2.26 en octubre de 1974 (el R^2 ajustado igual a 0.96). Luego de alcanzar el máximo, la volatilidad estimada comenzó a decrecer en un promedio aproximado de -0.12 por mes entre octubre de 1974 y julio de 1975 alcanzando un mínimo de 1.16 (el R^2 ajustado igual a 0.88). En agosto y octubre de 1975 la volatilidad estimada volvió a crecer un poco alcanzando un máximo de 1.34. Después de este leve aumento siguió disminuyendo en un promedio aproximado de -0.09 por mes entre octubre de 1975 y abril de 1976 (el R^2 ajustado igual a 0.87).

La evolución de la volatilidad de las tres variables se puede observar en la

Figura 4. El gráfico de la evolución de la volatilidad para los rendimientos de la Producción Industrial muestra una gran variabilidad entre julio de 1948 y diciembre de 1962. Entre enero de 1963 y diciembre de 1983 la volatilidad estimada era moderada. Luego, entre enero de 1984 y principios del tercer trimestre del 2005 la volatilidad se redujo por debajo de 1 en casi todo el periodo. Este periodo es conocido como la Gran Moderación. Un periodo en el que las variables macroeconómicas no tenían mucha variación y crecimiento económico estable. Finalizando el tercer trimestre del 2005 hasta finales el cuarto trimestre del 2009 la volatilidad estimada aumento nuevamente. Este periodo es conocido como la Gran Recesión. Luengo, entre el enero del 2010 y diciembre de 2019 la volatilidad estimada volvió a ser inferior a uno.

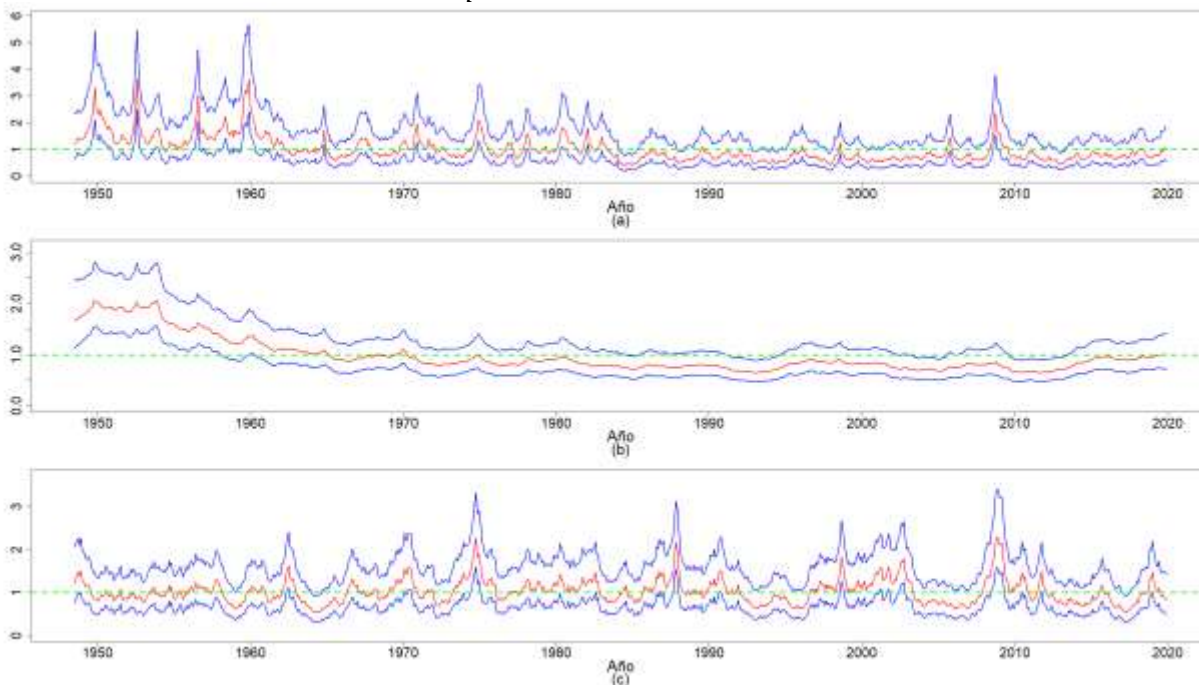
El grafico de la evolución de la volatilidad de los rendimientos de la Tasa de desempleo muestra que la volatilidad estimada fue alta entre julio de 1948 y diciembre de 1954. Luego comenzó a decrecer lentamente hasta el primer trimestre de 1965. Finalizando el primer trimestre de 1965 hasta diciembre de 1984 la volatilidad estimada es inferior a 1 decreciendo aun con mayor lentitud. Desde enero de 1985 hasta diciembre del 2011 la volatilidad estimada era inferior a 1 y con poca variabilidad. Comenzando enero del 2011 hasta diciembre de 2019 la volatilidad estimada crece muy lentamente pero siempre inferior a 1.

El grafico de la evolución de la volatilidad de los rendimientos del Índice SP500 muestra que hay periodos donde la volatilidad estimada es aproximadamente 1 mostrando estabilidad en las empresas que componen el Índice SP500. Además, hay otros periodos donde la volatilidad estimada es inferior a 1. También se puede observar que hay periodos donde la volatilidad estimada es muy alta, por ejemplo, en octubre de 1974, noviembre de 1987 y noviembre de 2009.

Figura 4

Gráficos temporales de la evolución de la volatilidad para los rendimientos de: (a) Producción Industrial: Índice total (ajustado estacionalmente), (b) Tasa de desempleo (Ajustada estacionalmente) y (c) Índice de rendimiento del mercado de valores SP500. Las líneas azules son

sus respectivos Intervalos de credibilidad de 95%, la línea roja es la media posterior de la evolución de la volatilidad mientras que la línea horizontal verde es uno.



Fuente: Elaboración propia.

Con los elementos de la matriz de covarianza Σ presentados en la Tabla 4 se calculan los elementos de la matriz de correlación estimada con la formula $\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}}$, $i, j = 1, \dots, 2p$. La correlación entre los choques de los rendimientos de la Producción Industrial y la Tasa de Desempleo es $\rho_{12,\varepsilon\varepsilon} = -0.3$ lo que indica una relación inversa. Esto sugiere que aumentos en los rendimientos de la Tasa de Desempleo son influenciados por disminuciones en los rendimientos de la Producción Industrial. Por otro lado, disminuciones en los rendimientos de la Tasa de Desempleo son influenciados por aumentos en los rendimientos de la Producción Industrial.

Los intervalos de credibilidad del 95% de $\rho_{12,\varepsilon\varepsilon}$ son $[-0.36, -0.23]$ y no contienen el cero por lo que aporta evidencia fuerte de la relación inversa. El resto de los intervalos de credibilidad del 95% de las correlaciones de los choques de los rendimientos contienen el cero por lo que aporta evidencia fuerte de que las correlaciones estimadas sean en realidad sean cero.

La correlación entre los choques de los rendimientos de la Producción Industrial del mes actual y los choques de la volatilidad del siguiente mes es $\rho_{11,\varepsilon\eta} = -0.35$. Esto quiere decir que la volatilidad del siguiente mes de los rendimientos de la Producción Industrial es influenciada por disminuciones en los rendimientos de la Producción Industrial en el mes actual. Esto sugiere que la producción de los sectores industriales del siguiente mes reacciona a disminuciones en la producción de los sectores industriales del mes actual. Los intervalos de credibilidad del 95% de $\rho_{11,\varepsilon\eta}$ son $[-0.51, -0.19]$ y no contienen el cero por lo que aporta evidencia fuerte de la correlación negativa.

La correlación entre los rendimientos de la Tasa de desempleo del mes actual y la volatilidad del mes siguiente de los rendimientos de la Producción Industrial es $\rho_{21,\varepsilon\eta} = 0.19$. Esto quiere decir que la volatilidad del siguiente mes de los rendimientos de la Producción

Industrial es influenciada por aumentos en los rendimientos de la Tasa de Desempleo del mes actual. Esto sugiere que la producción de los sectores industriales del siguiente mes reacciona a aumentos en los rendimientos de la Tasa de desempleo del mes actual.

Los intervalos de credibilidad del 95% de $\rho_{21,\varepsilon\eta}$ son [0.021,0.38] y no contienen el cero por lo que aporta evidencia fuerte de la correlación positiva. Por otro lado, los intervalos de credibilidad del 95% de la correlación entre los rendimientos de la Producción Industrial del mes actual y la volatilidad del siguiente mes de los rendimientos de la Tasa de desempleo contienen el cero por lo que es evidencia fuerte de que $\rho_{12,\varepsilon\eta}$ sea en realidad cero.

La correlación entre los rendimientos del Índice SP500 del mes actual y la volatilidad del siguiente mes es $\rho_{33,\varepsilon\eta} = -0.43$. Esto quiere decir que la volatilidad del siguiente mes de los rendimientos del Índice SP500 es influenciada por disminuciones en los rendimientos del mes actual. Esto sugiere que los participantes de las empresas que componen el Índice SP500 reaccionan a disminuciones en los rendimientos de los precios del mercado financiero en el mes actual.

Los intervalos de credibilidad del 95% de $\rho_{33,\varepsilon\eta}$ son [-0.6,-0.24] y no contienen el cero por lo que aporta evidencia fuerte de la correlación negativa. El resto de los intervalos de credibilidad del 95% de las correlaciones entre los rendimientos del mes actual y la volatilidad del mes siguiente contienen el cero por lo que es fuerte evidencia de que sus correlaciones en realidad sean cero. Cabe resaltar que los intervalos de credibilidad del 95% de la correlación de los choques de la volatilidad contienen el cero por lo que es fuerte evidencia de que los choques de la volatilidad de los rendimientos sean en realidad cero.

Tabla 5

(a) Media Posterior de un BVAR(5), (b) Estimador LS de un VAR(5) y (c) Media posterior, Desviación Estándar e Intervalos de credibilidad del 95% de los elementos del vector término intersección v y las matrices de coeficientes $A_1, \dots, A_5$.

	BVAR(5)	VAR(5)	VAR(5)-MSV		
	Media	Media	Media	Desviación Estándar	Intervalo de Credibilidad del 95%
v_1	0.036	0.037	0.023	0.013	[-0.0024,0.0484]
A_{11}^1	0.296	0.266	0.208	0.0387	[0.1323,0.2840]
A_{12}^1	-0.009	-0.011	-0.017	0.0071	[-0.0311,-0.0031]
A_{13}^1	0.011	0.011	0.007	0.0046	[-0.0016,0.0165]
A_{11}^2	0.062	0.073	0.157	0.0346	[0.0894,0.2249]
A_{12}^2	-0.008	-0.007	-0.001	0.0064	[-0.0135,0.0115]
A_{13}^2	0.028	0.028	0.012	0.0043	[0.0035,0.0204]
A_{11}^3	0.064	0.084	0.106	0.0328	[0.0416,0.1706]
A_{12}^3	0.006	0.008	-0.001	0.0054	[-0.0117,0.0097]

A_{13}^3	0.027	0.028	0.013	0.004	[0.0054,0.0210]
A_{11}^4	0.031	0.053	0.083	0.031	[0.0218,0.1434]
A_{12}^4	0	0	0.003	0.0046	[-0.0057,0.0123]
A_{13}^4	0.011	0.012	0.005	0.0035	[-0.0019,0.0119]
A_{11}^5	-0.038	-0.077	-0.03	0.0286	[-0.0858,0.0262]
A_{12}^5	-0.007	-0.011	0.002	0.004	[-0.0060,0.0096]
A_{13}^5	0.018	0.019	0	0.003	[-0.0058,0.0060]
v_2	0.311	0.334	0.186	0.0555	[0.0772,0.2955]
A_{21}^1	-1.144	-1.175	-1.027	0.1357	[-1.2920,-0.7608]
A_{22}^1	-0.153	-0.171	-0.155	0.0363	[-0.2263,-0.0837]
A_{23}^1	-0.076	-0.076	-0.058	0.0221	[-0.1020,-0.0155]
A_{21}^2	-0.42	-0.473	-0.336	0.1207	[-0.5734,-0.1000]
A_{22}^2	0.058	0.044	0.056	0.0348	[-0.0127,0.1241]
A_{23}^2	-0.066	-0.067	-0.042	0.0201	[-0.0809,-0.0021]
A_{21}^3	-0.231	-0.289	-0.124	0.1004	[-0.3219,0.0723]
A_{22}^3	0.059	0.048	0.061	0.0335	[-0.0045,0.1269]
A_{23}^3	-0.043	-0.044	-0.02	0.0178	[-0.0551,0.0147]
A_{21}^4	-0.168	-0.25	-0.092	0.0848	[-0.2575,0.0745]
A_{22}^4	0.051	0.047	0.088	0.0321	[0.0255,0.1516]
A_{23}^4	-0.055	-0.058	-0.016	0.0158	[-0.0474,0.0144]
A_{21}^5	-0.01	0.016	-0.048	0.072	[-0.1892,0.0929]
A_{22}^5	0.116	0.127	0.115	0.0308	[0.0549,0.1756]
A_{23}^5	-0.033	-0.033	-0.006	0.0137	[-0.0333,0.0206]
v_3	0.254	0.24	0.328	0.0802	[0.1717,0.4861]
A_{31}^1	0.165	0.17	0.104	0.1493	[-0.1894,0.3961]
A_{32}^1	0.038	0.037	0.017	0.0369	[-0.0550,0.0896]
A_{33}^1	0.03	0.027	-0.02	0.0368	[-0.0920,0.0525]
A_{31}^2	-0.123	-0.152	-0.107	0.1317	[-0.3649,0.1509]
A_{32}^2	-0.032	-0.034	-0.011	0.0308	[-0.0719,0.0490]
A_{33}^2	-0.037	-0.038	-0.013	0.0357	[-0.0834,0.0566]
A_{31}^3	-0.067	-0.092	0.003	0.1119	[-0.2162,0.2231]
A_{32}^3	-0.032	-0.032	0.007	0.0263	[-0.0445,0.0586]
A_{33}^3	0.031	0.033	0.026	0.0347	[-0.0421,0.0943]
A_{31}^4	0.018	0.037	-0.027	0.0939	[-0.2111,0.1568]
A_{32}^4	0.063	0.075	0.02	0.0222	[-0.0231,0.0641]
A_{33}^4	0.024	0.025	0.025	0.0334	[-0.0407,0.0902]
A_{31}^5	0.096	0.211	-0.02	0.0809	[-0.1786,0.1392]
A_{32}^5	0.058	0.075	0.026	0.0193	[-0.0124,0.0633]
A_{33}^5	0.092	0.101	0.097	0.0315	[0.0352,0.1587]

Fuente: Elaboración propia.

Se puede observar en la

Tabla 5 los intervalos de credibilidad del 95% de los elementos de las matrices de coeficientes $A^2_{12}, A^3_{12}, A^4_{12}, A^5_{11}, A^5_{12}, A^5_{13}, A^5_{21}, A^5_{23}, A^1_{31}, A^1_{32}, A^1_{33}, A^2_{31}, A^2_{32}, A^2_{33}, A^3_{31}, A^3_{32}, A^3_{33}, A^4_{31}, A^4_{32}, A^4_{33}$ y A^5_{31} contienen el cero por lo que es evidencia fuerte de su parámetro verdadero en realidad sea cero. Por otro lado, los intervalos de credibilidad del 95% de los elementos de las matrices de coeficientes $v_1, A^1_{13}, A^2_{22}, A^3_{21}, A^3_{22}, A^3_{23}, A^4_{21}, A^4_{23}$ y A^5_{32} contienen el cero, sin embargo, el cero está más cerca de uno de los extremos del intervalo de credibilidad del 95% donde hay poca masa, por lo que existe la probabilidad que si aumenta la muestra algunos de estos parámetros sean distinto de cero como se muestra en la

Figura 5.

Se puede observar que el rendimiento r_{SPt} es explicado solamente por el término de intercepción $v_3 = 0.328$ y su quinto valor pasado $r_{SP,t-5}$ con su elemento $A^5_{33} = 0.097$. Por otro lado, el rendimiento r_{PIt} es explicado por sus primeros cuatro rezagos pasados, el primer rezago pasado de los rendimientos de la Tasa de Desempleo y, por los primeros tres rezagos pasados de los rendimientos del Índice SP500. Se puede observar que a medida que el orden de los rezagos de los rendimientos de la Producción Industrial aumenta, la fuerza de los coeficientes disminuye comenzando desde $A^1_{11} = 0.208$ y finalizando con $A^4_{11} = 0.083$. Cabe resaltar que los coeficientes de los cuatro rendimientos pasados de la Producción Industrial son positivos y mayores que los coeficientes en valor absoluto de las otras series. Esto quiere decir que la Producción Industrial es principalmente explicado por sus propios rendimientos pasados.

Los coeficientes de los tres rendimientos pasados del Índice SP500 son positivos y a medida que el orden de los rezagos aumenta, la fuerza de los coeficientes aumenta comenzando desde $A_{13}^1 = 0.07$ y finalizando con $A_{13}^3 = 0.013$. Esto quiere decir que los rendimientos de la Producción Industrial son explicados con menor fuerza por los rendimientos de los tres meses pasados del Índice SP500. Por ejemplo, si los rendimientos de los tres meses pasados del Índice SP500 son negativos y grandes los rendimientos de la Producción Industrial disminuirían lo que significa que la producción de los sectores industriales disminuiría. Por otro lado, si los rendimientos de los tres meses pasados del Índice SP500 son positivos los rendimientos de la Producción Industrial aumentarían lo que significa que la producción de los sectores industriales aumentaría.

Por último, el coeficiente del primer rendimiento pasado de la Tasa de Desempleo es $A_{12}^1 = -0.017$. Esto quiere decir que los rendimientos de la Producción Industrial son explicados con menor fuerza por los rendimientos del mes pasado de la Tasa de Desempleo. Esto sugiere que, si en el mes anterior los rendimientos de la Tasa de Desempleo son negativos y grandes en valor absoluto entonces disminuirán los rendimientos de la Producción Industrial lo que significa que la producción de los sectores industriales disminuirá. Por otro lado, si en el mes anterior los rendimientos de la Tasa de Desempleo son negativos entonces aumentarán los rendimientos de la Producción Industrial lo que significa que la producción de los sectores industriales aumentará.

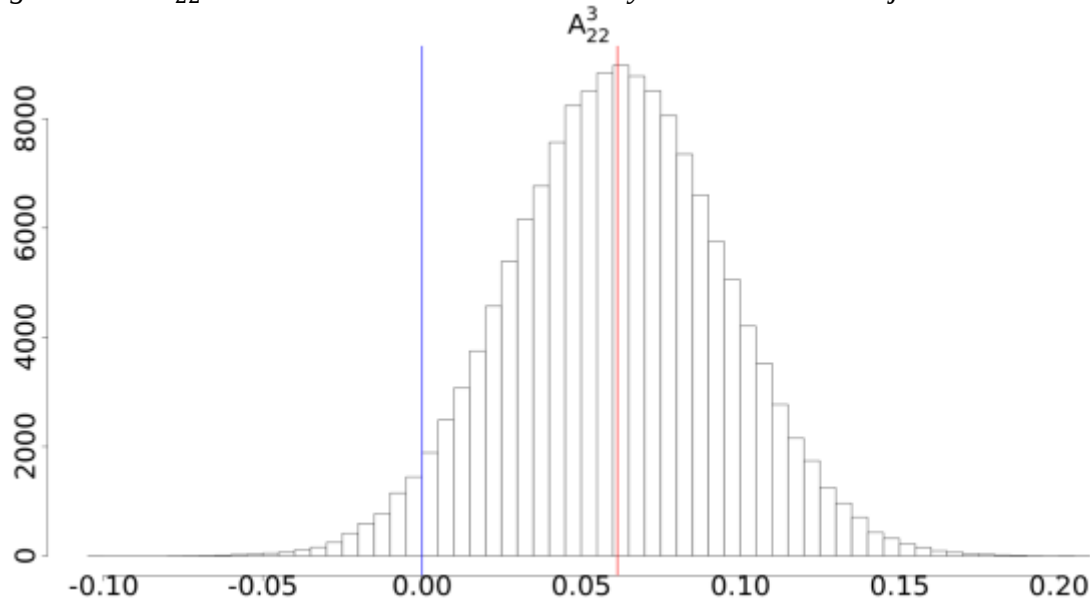
Los rendimientos de la Tasa de Desempleo son explicados por los primeros dos rezagos pasados de los rendimientos de la Producción Industrial, sus propios rezagos pasados (a excepción del segundo y tercer rezago) y los primeros dos rezagos pasados de los rendimientos del Índice SP500.

Los coeficientes de los dos rendimientos pasados de la Producción Industrial son negativos y en valor absoluto son más grandes que los coeficientes en valor absoluto de las otras series. Además, se puede observar que a medida que el orden de los rezagos aumenta, la fuerza de los coeficientes en valor absoluto aumenta. Esto quiere decir que los rendimientos de la Tasa de Desempleo son principalmente explicados por los rendimientos de los dos meses pasados de la Producción Industrial. Por ejemplo, si los rendimientos de los dos meses pasados de la Producción Industrial son negativos implica que los rendimientos de la Tasa de Desempleo aumentarían. Por otro lado, si los rendimientos de los dos meses pasados de la Producción Industrial son positivos implica que los rendimientos de la Tasa de Desempleo disminuirían.

Los coeficientes de los dos rendimientos pasados del Índice SP500 son negativos y en valor absoluto decrece su valor a medida que el orden de los rezagos aumenta. Esto quiere decir que los rendimientos de la Tasa de Desempleo son explicados con menor fuerza por los rendimientos de los dos meses pasados del Índice SP500. Por ejemplo, si los rendimientos de los dos meses pasados del Índice SP500 son negativos los rendimientos de la Tasa de Desempleo aumentarían lo que significa que la Tasa de Desempleo aumentaría. Por otro lado, si los rendimientos de los dos meses pasados del Índice SP500 son positivos los rendimientos de la Tasa de Desempleo disminuirían lo que significa que la Tasa de Desempleo disminuiría.

Figura 5

Histograma de A_{22}^3 . La línea vertical azul es el cero y la línea vertical roja es la media.



Fuente: Elaboración propia.

Conclusiones

En este artículo se propuso un modelo VAR-MSV para modelar series de tiempo multivariadas. Se usó una metodología bayesiana para estimar los parámetros del modelo. La volatilidad estocástica multivariada es configurada de tal manera que las observaciones en el mes de actual son correlacionadas con la volatilidad del mes siguiente. Los datos simulados reflejan lo preciso que es el método para estimar los parámetros, esto se debe en parte a que el muestreador de multi-move propuesto por Ishihara & Omori, 2012 captura muy bien la volatilidad.

Los gráficos de convergencia de v_1 y A_{33}^4 muestran que las trayectorias de las cadenas exhiben el mismo comportamiento a través de las iteraciones indicando convergencia. Los demás elementos del término intercepción y las matrices de coeficientes muestran los mismos comportamientos de convergencia. Por otro lado, el gráfico de la función de autocorrelación del elemento A_{33}^4 muestra poca correlación. Los demás elementos de las matrices de coeficientes muestran el mismo comportamiento. A diferencia de los elementos de las matrices de coeficientes, el gráfico de la función de autocorrelación de v_1 alcanza su máximo en 0.228. Además, decrece lentamente mostrando la alta dependencia de valores pasados. Esto puede ser debido a la priori de

Litterman, ya que las varianzas priori son infinitas para los términos de intercepción, reflejando que no se tiene ninguna conjetura a priori para estos coeficientes.

Se aplicó el modelo a series macroeconómicas clave para los Estados Unidos: Producción Industrial, Tasa de Desempleo y agregamos el índice de rendimiento del mercado de valores SP500. Los rendimientos de las variables macroeconómicas muestran dependencia de valores pasados de sus propios rendimientos como de los rendimientos del Índice del mercado de valores SP500 por lo que estos resultados añaden evidencia empírica de que las variables financieras afectan las variables macroeconómicas. Además, se encontró que la producción de los sectores industriales del siguiente mes reaccionara a disminuciones en la producción del mes actual y a aumentos en la Tasa de Desempleo en el mes actual.

El gráfico temporal de la evolución de la volatilidad para la Producción Industrial muestra que antes de 1985 y en 2007-2010 existía una mayor volatilidad que en los años 1985-2006, como lo sugiere la literatura. Por otro lado, el gráfico temporal de la evolución de la volatilidad para la Tasa de Desempleo parece ir decreciendo lentamente hasta el año 1970 y parece mantenerse baja en 1984-2019. Por último, el gráfico temporal de la evolución de la volatilidad del Índice SP500 muestra que hay periodos donde: La volatilidad estimada es muy alta, la volatilidad es aproximadamente igual a 1 por lo que no hay volatilidad y periodos donde la volatilidad es inferior a 1 indicando poco movimiento en los mercados financieros.

Referencias bibliográficas

- Benati, L. (2008). The great moderation in the United Kingdom. *Journal of Money, Credit and Banking*, 40(1), 121–147.
- Chiu, C.-W. (., Mumtaz, H., & Pintér, G. (2017). Forecasting with VAR models: Fat tails and stochastic volatility. *International Journal of Forecasting*, 33, 1124–1143.
- Clark, T. E. (2011). Real-time density forecasts from bayesian vector autoregressions with stochastic volatility. *Journal of Business & Economic Statistics*, 29(3), 327–341.
- Clark, T. E., & Ravazzolo, F. (2015). Macroeconomic forecasting performance under alternative specifications of time-varying volatility. *Journal of Applied Econometrics*, 30(4), 551–575.
- Cogley, T. (2005). How fast can the new economy grow? A bayesian analysis of the evolution of trend growth. *Macroeconomics*, 27, 179–207.
- Cogley, T., & Sargent, T. J. (2005). Drifts and volatilities: monetary policies and outcomes in the post WWII US. *Review of Economic Dynamics*, 8, 262–302.
- D'Agostino, A., Gambetti, L., & Giannone, D. (2013). Macroeconomic forecasting and structural change. *Journal of Applied Econometrics*, 28(1), 82–101.
- Ding, Q., Huang, J., & Zhang, H. (2021). The time-varying effects of financial and geopolitical uncertainties on commodity market dynamics: A TVP-SVAR-SV analysis. *Resources Policy*, 72.
- Doan, T., Litterman, R., & Sims, C. A. (1984). Forecasting and conditional projection using realistic prior distributions. *Econometric Reviews*, 3, 1–100.
- Durbing, J., & Koopman, S. J. (2002). A Simple and Efficient Simulation Smoother for State Space Time Series Analysis. *Biometrika*, 89, 603–616.
- Gali, J., & Gambetti, L. (2009). On the sources of the great moderation. *American Economic Journal: Macroeconomics*, 1(1), 26–57.
- Ishihara, T., & Omori, Y. (2012). Efficient bayesian estimation of a multivariate stochastic volatility model with cross leverage and heavy-tailed errors. *Computational statistics and data analysis*, 56(11), 3674–9473.

- Jacquier, E., Polson, N., & Rossi, P. (2004). Bayesian analysis of stochastic volatility models with fat tails and correlated errors. *Journal of econometrics*, 122, 185–212.
- Jong, P., & Shephard, N. (1995). The Simulation Smoother for Time Series Models. *Biometrika*., 82, 339–350.
- Jore, A. S., Mitchell, J., & Vahey, S. P. (2010). Combining forecast densities from VARs with uncertain instabilities. *Journal of Applied Econometrics*, 25, 621–634.
- Koopman, S. J. (1993). Disturbance Smoother for State Space Models. *Biometrika*., 80, 117–126.
- Litterman, R. (1986). Forecasting with Bayesian Vector Autoregressions: Five Years of Experience. *Journal of Business and Economic Statistics*., 4, 25–38.
- Lutkepohl, H. (2005). *New introduction to multiple time series analysis*. Springer Science & Business Media.
- Mumtaz, H. (2018). A generalized stochastic volatility in mean VAR. *Economice Letters*, 173, 10–14.
- Mumtaz, H. (2020, July). *A Generalised Stochastic Volatility in Mean VAR. An Updated Algorithm*. Working Papers, Queen Mary University of London, School of Economics and Finance.
- Nakajima, J. (2011). Time-Varying Parameter VAR Model with Stochastic Volatility: An Overview of Methodology and Empirical Applications. *Monetary and Economic Studies*, 29, 107–142.
- Omori, Y., Shephard, N., & Nakajima, J. (2007). Stochastic Volatility with Leverage: Fast and Efficient Likelihood Inference. *Journal of Econometrics*, 140(2), 425–449.
- Primiceri, G. C. (2005). Time varying structural vector autoregressions and monetary policy. *The Review of Economic Studies*, 72, 821–852.
- Shephard, N., & K.Pitt, M. (1999). Time varying covariances: a factor stochastic volatility approach. In *Bayesian Statistics 6, Proceedings of the Sixth Valencia International Meeting* ((edited by J.M. Bernardo, J.O. Berger, A.P. Dawid and A.F.M Smith) ed., pp. 547–570). Oxford: Oxford University Press.
- Shephard, N., & Pitt, M. K. (1997). Likelihood analysis of non-gaussian measurement time series. *Biometrika*, 84, 653–667.
- Sims, C. A. (1972a). Money, Income, and Causality. *American Economic Review*, 62 (4), 540–552.
- Sims, C. A. (1972b). The Role of Aproximate Prior Restrictions in Distributed Lag Estimation. *Journal of the American Statistical Association*, 67 (337), 169–175.
- Sims, C. A. (1980a). Comparison of Interwar and Postwar Business Cycles: Monetarism Reconsidered. *American Economic Review*., 70 (2), 250–257.
- Sims, C. A. (1980b). Macroeconomics and Reality. *Econometrica*, 48(1), 1–48.
- Spiegelhalter, D. J., Best, N. G., Carlin, B. P., & Van Der Linde, A. (2002). Bayesian measures of model complexity and fit. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 64, 583–639.
- Stock, J. H., & W.Watson, M. (2003, September). Forecasting Output and Inflation: The Role of Asset Prices. *Journal of Economic Literature*, 41, 788–829.
- Triantafyllopoulos, K. (2011). Time-varying vector autoregressive models with volatility. *Journal of Applied Statistics*, 38(2), 369–382.
- Uhlig, H. (1997). Bayesian vector autoregressions with stochastic volatility. *Econometrica*, 65(1), 59–72.